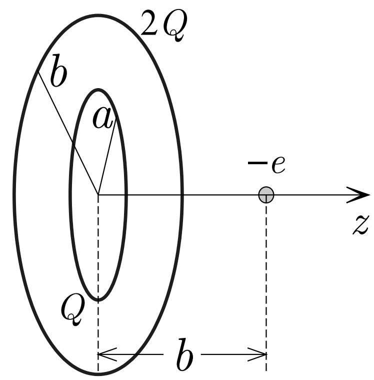
Universidad Simón Bolívar — **FS2211** 2^{do} Parcial (30 %) Bloque **C**

Departamento de Física — Lunes, 25 de Febrero de 2013

Nombre ______________________________ Carnet ______________________

1. [8 *pts.*] Dos aros cargados de radios respectivos a y b ($b = \sqrt{8}\,a$), están localizados sobre el plano x–y, con centro en el origen de coordenadas. El aro de radio a tiene carga neta $+Q$, el de radio b, carga neta $+2Q$.



   (a) [3 *pts.*] Calcule el potencial electrostático $V(z)$, debido a los dos aros, para cualquier punto arbitrario $(0, 0, z)$ sobre el eje z.

   (b) [3 *pts.*] Calcule el campo eléctrico $\vec{E}$, debido a los dos aros, para cualquier punto arbitrario $(0, 0, z)$ sobre el eje z.

   (c) [2 *pts.*] Un electrón (carga $-e$) se suelta, en reposo, desde el punto $(0, 0, b)$. Calcule la energía cinética de la carga cuando alcance el origen de coordenadas.

(a) Desde la posición arbitraria $(0, 0, z)$, la distancia a cualquier punto del aro $+Q$ es $R_+ = \sqrt{a^2 + z^2}$ (centro en el origen). La distancia a cualquier punto del aro $+2Q$ será $R_{+2} = \sqrt{b^2 + z^2}$. Siendo las distancias R_+ y R_- constantes en las respectivas expresiones, al integrar sólo se suma sobre la correspondiente distribución de cargas $\int dQ = Q$. Los potenciales estarán dados, entonces, por la expresión de Coulomb:

$$V_+ = \frac{\int dQ}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{R_+} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} \qquad \text{y} \qquad V_{+2} = \frac{\int dQ}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{R_{+2}} = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}}$$

$$\text{quedando} \qquad \boxed{V(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} + \frac{2}{\sqrt{b^2+z^2}}\right)} \tag{1}$$

(b) Calculamos el campo como el gradiente del potencial ($E_z = -dV/dz$), y se obtiene, usando el potencial (1):

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}} + \frac{2z}{(\,b^2+z^2\,)^{3/2}}\right]\hat{z}} \tag{2}$$

(c) Dado que el campo (2) es conservativo, basta con aplicar el principio de conservación de la energía mecánica para obtener $\Delta K = K(z=0) = -\Delta U = -e\,[\,V(z=b) - V(z=0)\,]$:

$$K(z=0) = -\frac{eQ}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{2}{\sqrt{b^2+b^2}} - \frac{1}{a} - \frac{2}{b}\right)$$

$$\text{tomando} \quad b = \sqrt{8}\,a, \quad \text{queda:}$$

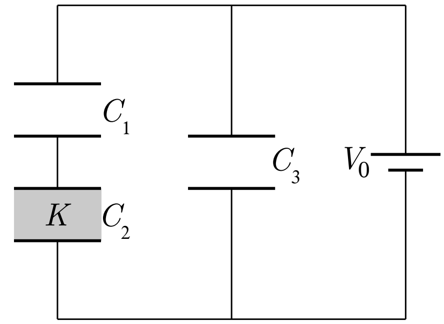
$$K(z=0) = -\frac{eQ}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{3a} + \frac{1}{2a} - \frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{2}\,a}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{K(z=0) = \frac{eQ}{4\pi\epsilon_0\,a}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{6}\right)} \tag{3}$$

2. [10 *pts.*] Los capacitores mostrados en la figura, de capacitancias respectivas $C_1 = C_2 = 2C$ y $C_3 = C$, se encuentran <u>inicialmente vacíos</u> (sin material dieléctrico en su interior). El circuito de capacitores está alimentado, como se muestra en la figura, por una fuente DC cuyo voltaje es V_0.

(a) [4 *pts.*] Estando los tres capacitores todavía vacíos, determine las respectivas cargas $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$, y la energía electrostática total, U_{tot}, almacenada en el sistema.

(b) [4 *pts.*] A continuación, se introduce un dieléctrico de constante $K = 2$ en el capacitor C_2. Calcule la nueva capacitancia C_2' del mismo, y calcule de nuevo las respectivas cargas $\{Q_1', Q_2', Q_3'\}$. Suponga que el sistema sigue conectado a la fuente de voltaje V_0.

(c) [2 *pts.*] Calcule el trabajo realizado por el agente externo para introducir el dieléctrico en el capacitor C_2.



Respuestas:

(a) La diferencia de potencial entre las dos placas del capacitor C_3 es $V_3 = V_0$. Los otros dos capacitores C_1 y C_2 son idénticos y comparten la misma carga. Al estar en serie, y ser idénticos, la diferencia de potencial será la misma para ambos $V_1 = V_2 = V_0/2$. Multiplicando en cada caso por la capacitancia correspondiente, se obtiene

$$\boxed{Q_3 = CV_0, \quad \text{y} \quad Q_1 = Q_2 = (2C)(V_0/2) = CV_0} \tag{4}$$

La energía almacenada en cada capacitor estará dada por la expresión $U_i = \frac{1}{2}Q_iV_i$. Sumando las tres energías, obtenemos:

$$U_{tot} = \frac{1}{2}\,[\,2 \times (CV_0)(V_0/2) + (CV_0)V_0\,] \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_{tot} = CV_0^2} \tag{5}$$

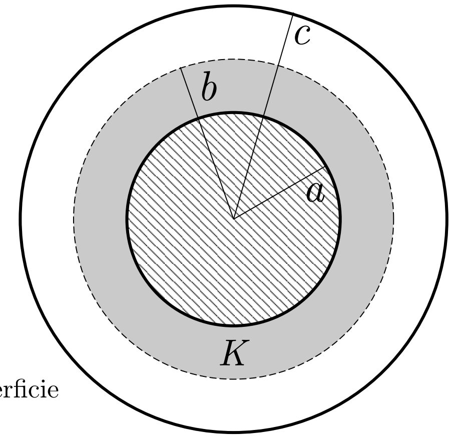
(b) La nueva capacitancia será $\boxed{C_2' = KC_2 = 4C,}$ y las capacitancias C_1 y C_3 quedan invariantes. Las diferencia de potencial entre las placas del capacitor C_3 queda igual que en (a), dado que la batería permanece conectada. Dado que la capacitancia C_2' es ahora el doble que la capacitancia C_1, el voltaje $V_1{}'$ será el doble que $V_2{}'$ (ya que siguen compartiendo la carga). Siendo la suma de ambos igual a V_0, se tiene entonces que $\boxed{V_1{}' = 2\,V_2{}' = 2V_0/3.}$
Las nuevas cargas $\{Q_1', Q_2', Q_3'\}$ serán entonces:

$$\boxed{Q_3' = C_3V_0 = CV_0, \quad \text{y} \quad Q_1' = Q_2' = \frac{4}{3}\,CV_0.} \tag{6}$$

(c) La carga total del sistema es, inicialmente, $\boxed{Q_{tot} = Q_1 + Q_3 = 2CV_0.}$ Luego de introducir el dieléctrico, queda $\boxed{Q_{tot}' = Q_1' + Q_3' = 7CV_0/3.}$ Usando la expresión $U = Q_{tot}V_0/2$, se tiene que la variación en la energía almacenada (trabajo del agente externo) es:

$$W_{ext} = \Delta U = \frac{1}{2}\,(\,Q_{tot}' - Q_{tot})\,V_0 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{7CV_0}{3}\right) - (2CV_0)\right]V_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_{ext} = \frac{1}{6}CV_0^2} \tag{7}$$

3. [12 *pts.*] Se tienen dos esferas conductoras concéntricas, una maciza de radio a y la otra hueca, como se muestra en la figura, de radio interno c. El espacio entre ellas está parcialmente relleno con un material dieléctrico de constante K, concéntrico, de radio interno a y radio externo b. Se sabe que el potencial en los conductores tiene valores respectivos $V_a = V_0$ $(r = a)$ y $V_c = 0$ $(r = c)$.



(a) [3 *pts.*] Calcule el campo eléctrico $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ en el espacio entre conductores. Suponga conocida la carga Q_a, del conductor interno, y tenga cuidado en especificar claramente el campo en las dos regiones, con dieléctrico $(a < r < b)$, y vacía $(b < r < c)$.

(b) [4 *pts.*] Calcule el potencial eléctrico $V(r)$, especificando las expresiones para las regiones, con dieléctrico $(a < r < b)$, y vacía $(b < r < c)$.

(c) [3 *pts.*] A partir del potencial obtenido, calcule la carga Q_a del conductor interno y la capacitancia del sistema.

(d) [2 *pts.*] Determine la densidad superficial de carga σ_{ind} inducida en la superficie externa $(r = b)$ del dieléctrico.

Respuestas:

(a) La Ley de Gauss con dieléctricos puede resumirse en $K\Phi_E = K \oint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{S}} = Q^{ext}/\epsilon_0$, siendo K la constante dieléctrica y Q^{ext} la suma de cargas encerradas que no estén ligadas al dieléctrico. Basta entonces con determinar el campo de cargas libres $\vec{\boldsymbol{E}}^{ext}$, y dividir entre K en la región pertinente. En simetría esférica, el campo es radial $\vec{\boldsymbol{E}}^{ext} = E_r^{ext}\,\widehat{\boldsymbol{r}}$ y el flujo a través de una superficie esférica de radio $r > a$ queda:

$$\Phi_E = 4\pi\, r^2\, E_r^{ext} = \frac{Q_a}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_r^{ext} = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r^2}, \tag{8}$$

con lo cual se obtiene el campo para las dos regiones indicadas (dieléctrico en la región $r \in [a, b]$):

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \dfrac{\widehat{\boldsymbol{r}}}{Kr^2} & \text{para} \quad a < r < b \\[2ex] \dfrac{\widehat{\boldsymbol{r}}}{r^2} & \text{para} \quad b < r < c \end{cases}} \tag{9}$$

(b) Tomando el voltaje definido en $r = c$ como referencia $(V_c \equiv 0)$, calculamos el potencial electrostático $V(r)$ para la región vacía $(b < r < c)$:

$$V(r) = -\int_c^r \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = -\frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0} \int_c^r \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{c} \right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{V(r = b) \equiv V_b = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)} \tag{10}$$

Usamos la expresión resaltada en (10) como referencia en la segunda parte del cálculo, y obtenemos para la región vacía $(a < r < b)$:

$$V(r) = V_b - \int_b^r \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = V_b - \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0\, K} \int_b^r \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{K} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) \right] \tag{11}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(r = a) \equiv V_a = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{K} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right]} \tag{12}$$

(c) Resolviendo la suma de fracciones, la expresión resaltada en (12), nos permite obtener el valor de la carga Q_a en función de los datos del problema $(V_a \equiv V_0)$. El coeficiente del voltaje V_0 entre las superficies conductoras $r = a$ y $r = c$, en la expresión de Q_a, será el valor de la capacitancia del sistema:

$$\boxed{Q_a = \frac{4\pi\epsilon_0\, abc\, K}{[\, Ka\, (c - b) + c\, (b - a)\,]}\, V_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{4\pi\epsilon_0\, abc\, K}{[\, Ka\, (c - b) + c\, (b - a)\,]}} \tag{13}$$

(d) Basta con aplicar la Ley de Gauss en un entorno de la superficie $r = b$, para obtener

$$\begin{aligned} \frac{Q_{ind}}{\epsilon_0} \equiv 4\pi\, b^2\, \frac{\sigma_{ind}}{\epsilon_0} \quad &= \quad 4\pi\, b^2 \left[\, E_r(b^+) - E_r(b^-) \,\right] \;=\; 4\pi\, b^2 \left[\frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0\, b^2} - \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0\, b^2\, K} \right], \\ &= \quad \frac{Q_a}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{K} \right) \quad \text{de donde} \quad \boxed{\sigma_{ind} = \frac{Q_a}{4\pi\, b^2} \left(1 - \frac{1}{K} \right)} \end{aligned} \tag{14}$$